

MATURITNÍ OTÁZKY – MATEMATIKA

OBSAH

1. Stereometrie – objemy a povrchy těles
2. Logická výstavba matematiky, definice, věty, důkazy
3. Stereometrie – řezy těles
4. Matematizace reálné situace
5. Soustavy lineárních a kvadratických rovnic
6. Variace, permutace
7. Kvadratická funkce
8. Analytická geometrie – přímka v rovině
9. Neurčitý integrál
10. Analytická geometrie – kružnice, tečna ke kružnici
11. Analytická geometrie – elipsa, tečna elipsy
12. Parametrické rovnice
13. Rovnice s neznámou pod odmocninou
14. Analytická geometrie – hyperbola, tečna hyperboly
15. Úprava výrazů
16. Analytická geometrie – parabola, tečna paraboly
17. Výrazy s odmocninou
18. Vektorová algebra
19. Kombinace
20. Využití Pythagorovy věty
21. Kombinační čísla, kombinační rovnice
22. Využití Euklidových vět
23. Vlastnosti funkce
24. Binomická věta
25. Kvadratická rovnice
26. Určitý integrál
27. Lineárně lomená funkce
28. Aritmetická posloupnost
29. Geometrická posloupnost
30. Funkce s absolutní hodnotou
31. Exponenciální funkce
32. Nekonečné řady
33. Exponenciální rovnice
34. Limita posloupnosti
35. Logaritmická rovnice
36. Limita funkce
37. Geometrie v rovině
38. Derivace funkce
39. Goniometrické funkce
40. Tečna grafu funkce
41. Goniometrické výrazy
42. Průběh funkce
43. Pravděpodobnost
44. Goniometrické rovnice
45. Trigonometrie, sinová a kosinová věta
46. Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě
47. Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě
48. Komplexní čísla
49. Logaritmická funkce
50. Komplexní rovnice

1. STEREOMETRIE

- zabývá se geometrickými útvary v prostoru

- 1) Dvě přímky v rovině nazýváme
 - a) Různoběžky – mají spol. právě jeden bod
 - b) Rovnoběžky – leží v jedné rovině a nemají spol. žádný bod
 - c) Mimoběžky – neleží v jedné rovině a nemají spol. bod
- 2) Přímka a rovina
 - a) Přímka p leží v rovině $\rho \Rightarrow (p \subset \rho)$; každý bod p je bodem ρ
 - b) p je \parallel s $\rho \Rightarrow (p \cap \rho = \emptyset)$; nemá s rovinou žádný spol. bod
 - c) p je různoběžná s $\rho \Rightarrow (p \cap \rho = P)$; má s rovinou právě jeden spol. bod
- 3) Dvě různé roviny ρ a σ :
 - a) rovnoběžné – nemají spol. žádný bod
 - b) různoběžné – mají spol. přímku \Rightarrow průsečnice rovin

GEOMETRICKÁ TĚLESA

-mnohostěn – množina všech bodů v prostoru ležících uvnitř a na mnohostěnové ploše, která je sjednocením n hraničních mnohoúhelníků ($n \geq 4$) ležících v rovinách tak, že strana každého z nich je zároveň stranou jiného mnohoúh.

NEROTAČNÍ TĚLESA

Hranol: $V = S_p \cdot v$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

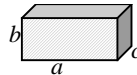
$$U = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Kvádr: $V = abc$

$$S = 2(ab + bc + ac)$$



Jehlan: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$$S = S_p + S_{pl}$$



Komolý jehlan: $V = \frac{1}{3} v (S_{p1} + S_{p2} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}})$

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$$



ROTAČNÍ TĚLESA

Válec: $V = \pi r^2 v$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$



Kužel: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$$S = \pi r^2 + \pi r s, \text{ kde } s = \sqrt{r^2 + v^2} - \text{délka pláště}$$



Komolý kužel: $V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + (\pi r_1 + \pi r_2) s$$



Koule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$



$$S = 4\pi r^2$$

Kulová úseč:

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2}\right)^3$$

objem válce plus objem koule

$$r_1 = \sqrt{r^2 - (r-v)^2}$$

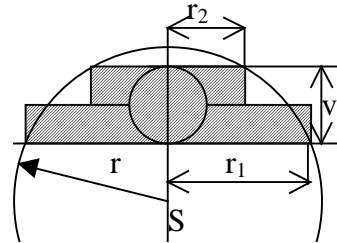
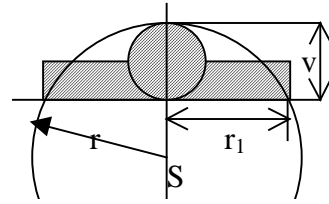
$$S = \pi r_1^2 + 2\pi r v - \text{obsah podstavy plus}$$

obsah kulového vrchlíku

Kulová vrstva:

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2}\right)^3$$

objem dvou válců a objem koule



2. LOGICKÁ VÝSTAVBA MATEMATIKY

Základem logické výstavby matematiky je soubor **axiomů** (= základní věty)

AXIÓMY nějakého matematického oboru jsou výroky, jejichž pravdivost se uznává bez důkazu. Pojmy, kterých je použito v axiomech, a které nedefinujeme, nazýváme **základní (primitivní) pojmy**.

Soustava axiomů musí být **a) bezesporná** – nelze z ní vyvodit výrok a zároveň jeho negaci

b) nezávislá – nelze vyvodit jeden axiom z ostatních axiomů

c) úplná – ze soustavy axiomů lze vyvodit pravdivost, nebo nepravdivost lib. Mat. výroku, který není axiomem

K zavedení dalších matematických pojmů slouží **definice**, které stanoví **název** nového pojmu a určí jeho **charakteristické vlastnosti** pomocí pojmů základních, popř. později zavedených.

Matematická věta je pravdivý matematický výrok, který je možné logicky odvodit z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Věty slouží k budování matematické teorie i k využití matematických poznatků v praxi.

Obecná věta..... $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$

Obrácená věta..... $\forall x \in D : B(x) \Rightarrow A(x)$

Obměněná věta..... $\forall x \in D : \bar{B}(x) \Rightarrow \bar{A}(x)$

Negovaná věta..... $\exists x \in D : A(x) \wedge \bar{B}(x)$

Věta nemusí mít stejnou pravd. hodnotu jako pův. tvrzení

Věta je ekviv. s pův. \Rightarrow obě mají stejnou platnost

Věta neguje pův. tvrzení

Např. Věta: $\forall n \in \mathbb{N} : 2/n \Rightarrow 2/n^2$

Věta obměněná : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \times n^2 \Rightarrow 2 \times n$

Věta obrácená: $\forall n \in \mathbb{N} : 2/n^2 \Rightarrow 2/n$

Věta negovaná: $\exists n \in \mathbb{N} : 2/n \wedge 2 \times n^2$

Platí –li věta i věta obrácená, pak je můžeme společně vyjádřit jedinou obecnou větou ve tvaru ekvivalence:

$$\forall n \in D : A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

Logický proces, kterým se ověřuje platnost matematické věty pomocí axiomů, definic a dříve prokázaných vět se nazývá **Důkaz matematické věty**.

Máme tři typy důkazů: **1. Přímý důkaz**
2. Nepřímý důkaz
3. Důkaz sporem

1. Přímý důkaz: Implikace $A \Rightarrow B$, A= předpoklad, B=tvrzení, závěr

- předpoklad považujeme za správný a postupnými kroky z něj vyvozujeme další výroky až k B

Př. Dokažte, že součet jakýchkoliv N za sebou jdoucích čísel je dělitelný 3mi

$$a, b, c \in \mathbb{N} \text{ jdoucí za sebou} \Rightarrow a = n \wedge b = n+1 \wedge c = n+2 \Rightarrow a+b+c = 3n+3 = 3(n+1) \dots a+b+c / 3$$

2. Nepřímý důkaz: $A \Rightarrow B$ provádíme jako přímý důkaz její obměny $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, neboť jsou obě ekvivalentní

Př. Věta: $\forall n \in \mathbb{N} : 2/n^2 \Rightarrow 2/n$ obměna $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \times n \Rightarrow 2 \times n^2$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \times n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow 2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2 = 2k+1 \Rightarrow 2 \times n^2$$

Platí věta obměněná, tzn. Platí i věta původní.

3. Důkaz sporem: nejprve se dokazovaný výrok neguje a potom tuto negaci začneme dokazovat jako přímý důkaz, ale dojdeme k logickému sporu => když neplatí negace, platí pův. tvrzení.

Matematická indukce: Dokážeme, že platí $V(1)$, potom že pro $k \geq 1; V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Např. $\forall n \in N; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

1) ověření $n=1; L=P$

2) předpoklad $k \geq 1; L = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \quad P = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

máme dokázat $k+1; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$$L = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

3) platí pro $\forall k \in N$

5. SOUSTAVY LIN. A KVADRAT. ROVNIC

-soustava rovnic – několik rovnic o dvou a více neznámých, kterýmají být splněny současně
- řešením je průnik řešení jednotlivých rovnic

Metody řešení:

1. Sčítací
2. Dosazovací (substituční)
3. Gaussova eliminační
4. Grafické řešení
5. Srovnávací

1. Sčítací metoda

$$\begin{array}{r} X + Y = -3 / x2 \\ -2X + Y = 6 \\ \hline 3Y = 0 \\ Y = 0 \\ X + Y = -3 \\ -2X + Y = 6 / x(-1) \\ \hline 3X = -9 \\ X = -3 \end{array} \quad \dots \text{rovnice vhodně vynásobíme tak, aby vypadla jedna neznámá}$$

$$\underline{K = \{[-3, 0]\}}$$

2. Dosazovací metoda

$$\begin{array}{r} X + Y = -3 \\ -2X + Y = 6 \\ \hline Y = 2X + 6 \\ X + 2X + 6 = -3 \\ 3X = -9 \\ X = -3 \end{array} \quad \dots \text{vyjádříme vhodně jednu neznámou pomocí druhé}$$

$$\begin{array}{r} -2 \cdot (-3) + Y = 6 \\ Y = 0 \end{array} \quad \underline{K = \{[-3, 0]\}}$$

3. Gaussova eliminační metoda

-využíváme při řešení více lin. Rovnic s více neznámými
- rovnice násobíme vhodnými čísly a sčítáme tak, aby neznámé postupně vypadly => soustavu převádíme na tzv. Trojúhelníkový (schodovitý) tvar
- lze řešit i pomocí MATICOVÉHO ZÁPISU

$$X + 2Y - 3Z = -1 / x3 \quad \Rightarrow \quad / x(-2)$$

$$\begin{array}{l} -3X + Y - 2Z = 2 \\ \underline{2X + 3Y + 2Z = 11} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} X + 2Y - 3Z = -1 \\ 7Y - 11Z = -1 \\ \underline{-Y + 8Z = 13 \quad / \cdot 7} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} X + 2Y - 3Z = -1 \\ 7Y - 11Z = -1 \\ 45Z = 90 \\ \underline{Z = 2} \end{array}$$

..... získanou neznámou zpětně dosazujeme

4. Grafické řešení

-rovnice jsou přímkami => vyjádříme y a hledáme souřadnice průniku

POZN. Pokud máme např. 2 lin. rovnice se 3mi neznámými, zvolíme jednu neznámou jako parametr => nekonečně mnoho řešení

Při řešení soustavy kvadratické a lin. soustavy využíváme dosazovací metodu. Z lin. vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do kvadratické

6. VARIACE, PERMUTACE

Základní kombinatorická pravidla:

1. Pravidlo součinu – počet všech neuspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby atd.. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$

Př. Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje právě jednou.

Na prvním místě mohou být číslice 1-9 (=>9 možností). Po tomto výběru může být na druhém místě opět devět možných číslic => 0 a jakákoliv z osmi různých od první vybrané

Počet uvažovaných čísel je tedy $9 \cdot 9 = 81$

2. Pravidlo součtu – Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, \dots, p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

Př. Stejný příklad s využitím pravidla o součtu.

Všechna přirozená dvojciferná čísla rozdělíme do dvou skupin a to na čísla s různými číslicemi a na dvojciferná čísla se stejnými číslicemi. Všechny dvojciferných čísel s různými číslicemi je $9 \cdot 10 = 90$ a s stejnými číslicemi $9 \cdot 1 = 9$. Označíme-li p jako hledaný počet pak $p + 9 = 90$

$p = 81$

VARIACE $V_k(n)$ – bez opakování

- **k-členná** variace z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

VARIACE $V_k(n)$ - s opakováním

- je k -tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní může vyskytovat nejvýše k -krát.

$$V_k(n) = n^k$$

PERMUTACE $P(n)$ – bez opakování

- zvláštní případ variace kdy $n=k$

$$P(n)=n!$$

PERMUTACE $P'(n)$ – s opakováním

-uspořádání k -tice sestavená z n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **alespoň** jednou

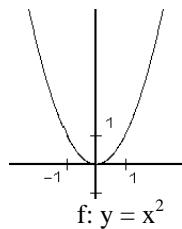
$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_p}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!},$$

kde n_1 je počet prvků 1. druhu, n_2 2. druhu a ... n_p p . druhu, přičemž platí, že $n_1+n_2+\dots+n_p=n$. Všechny prvky téhož druhu jsou stejné a žádné 2 prvky různých druhů nejsou stejné.

7. KVADRATICKÁ FUNKCE

Předpis: $f: y = ax^2 + bx + c$

a...kvadratický člen $a \neq 0$
 b...lineární člen $b \in \mathbb{R}$
 c...absolutní člen $c \in \mathbb{R}$



Grafem kv. fce je parabola s osou $o \parallel y$. Průsečík osy o s parabolou se nazývá vrchol paraboly

$$V\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$$

Základní vlastnosti:

<u>$a > 0$</u>	<u>$a < 0$</u>
$D_{(f)} = (-\infty, \infty)$	$D_{(f)} = (-\infty, \infty)$
$H_{(f)} = (c - b^2/4a, \infty)$	$H_{(f)} = (-\infty, c - b^2/4a)$
Pro $b=0$ je sudá, jinak ani sudá ani lichá.	Pro $b=0$ je sudá, jinak ani sudá ani lichá.
Rostoucí pro $x \in \langle -b/2a, \infty \rangle$	Rostoucí pro $x \in (-\infty, -b/2a \rangle$
Klesající pro $x \in (-\infty, -b/2a)$	Klesající pro $x \in \langle -b/2a, \infty \rangle$
Omezená zdola	Omezená shora
Konvexní	Konkávní
Není prostá	Není prostá
Je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$	Je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$

Řešení kvadr. rovnic graficky:

-kořeny kv. Rovnice jsou určeny průsečíky paraboly $f: y = ax^2 + bx + c$ s funkcí $g: y = 0$ (osa x).

8. ANALYTICKÁ GEOMETRIE – PŘÍMKA V ROVINĚ

Parametrické vyjádření:

$$x = X_1 + t \cdot u_1$$

$$y = Y_1 + t \cdot u_2$$

Obecná rovnice přímky:

$$ax + by + c = 0$$

$\vec{n}(a, b)$ – normálový (kolmý) vektor

$\vec{u}(-b, a), (b, -a)$ – směrový vektor

$$p \parallel O_x \Rightarrow by + c = 0$$

$$p \parallel O_y \Rightarrow ax + c = 0$$

Úsekový tvar rovnice přímky:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$p = -\frac{c}{a}$$

$$q = -\frac{c}{b}$$

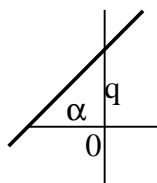
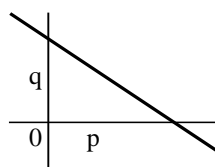
Směrový tvar:

$$y = kx + q$$

$$k = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

k....směrnice

Přímka, která má směrnici k a prochází bodem $X[x_1; y_1]$, má rovnici: $y = k(x - x_1) + y_1$



Vzájemná poloha dvou přímek daných parametricky:

1. Rovnoběžné přímky

- $p(P, \vec{u})$, $q(Q, \vec{v})$ jsou rovnoběžné právě tehdy je-li \vec{v} nenulovým násobkem \vec{u}

Př. Zjistěte zda jsou přímky p a q rovnoběžné:

$$P[2, 3] \quad \vec{u}(1; -2)$$

$$Q[1, 0] \quad \vec{v}(-0,5; 1)$$

$$(1; -2) = k \cdot (-0,5; 1)$$

$$1 = -0,5k$$

$$k = -2$$

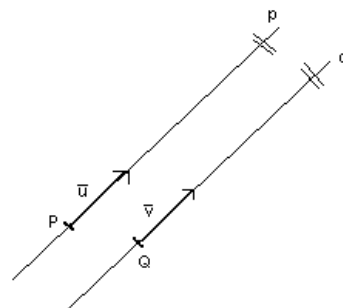
$$-2 = 1k$$

$$k = -2$$

V obou případech stejná směrnice \Rightarrow p a q jsou rovnoběžné

2. Totožné přímky

- přímky p a q jsou totožné $\Leftrightarrow p \parallel q \wedge P \in q$ nebo $Q \in p$



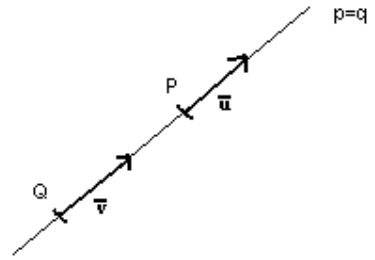
$$Př. P[3/2; 1]$$

$$\vec{u}(-1; 2)$$

$$Q[-1; 6]$$

$$\vec{v}(1/2; -1)$$

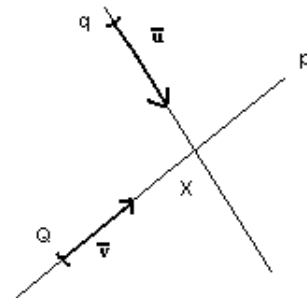
$$\begin{aligned}
 & \text{-----} \\
 & (-1;2)=k(1/2;-1) \\
 & 1/2k=-1 \quad -1k=2 \\
 & \underline{k=-2} \quad \underline{k=2} \dots\dots\dots \text{jsou rovn.} \\
 & Q \in \bar{u} \\
 & -1=3/2-t \\
 & \underline{6=1+2t} \\
 & \underline{t=5/2} \quad \underline{t=5/2} \dots\dots\dots \text{jsou totžné}
 \end{aligned}$$



3. Různoběžné přímky

- jsou různoběžné právě tehdy není li \bar{u} násobkem \bar{v}
 - spol. bodem je průsečík => jejich souřadnice musí vyhovovat rovnicím obou přímek

$$\begin{aligned}
 \text{Př. } P[3;2] \quad \bar{u}(2; -1) \\
 Q[-1;1] \quad \bar{v}(1;1) \\
 \text{-----} \\
 (2;-1)=k(1,1) \dots\dots \text{různoběžky} \\
 p: X= 3+2t \quad q: X=-1+r \\
 \underline{Y=2-t} \quad \underline{Y=1+r}
 \end{aligned}$$

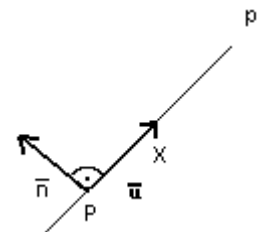


$$\begin{aligned}
 3+2t &= -1+r \\
 \underline{2-t} &= \underline{1+r} \\
 2t-r &= -4 \\
 \underline{-t-r} &= \underline{-1} \\
 r=2 \quad t &= -1 \dots\dots\dots \text{dosadíme do parametrické rovnice a dopočítáme průsečík} \\
 \underline{X[1;3]}
 \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky

- normálový vektor => kolmý ke směrovému vektoru přímky
 - $\bar{n}(X-P)=0$
 $ax+by+c=0$

a,b,...souřadnice normálového vektoru
DEF: Rovnice $ax+by+c=0$, kde alespoň jedno z čísel a, b $\neq 0$ se nazývá obecná rovnice přímky



$$\begin{aligned}
 \text{Př. Napište rovnici přímky s norm. vektorem } \bar{n}(1;3) \text{ a poč. bodem } A[-1,5] \\
 \underline{X+3Y+c=0} \\
 A \in p: \underline{-1+3 \cdot 5+c=0} \\
 \underline{c=-14} \\
 \underline{p: X+3Y-14=0}
 \end{aligned}$$

Vzájemná poloha dvou přímek daných obecnou rovnicí:

1. Rovnoběžné - $ax+by+c=0$
 $a'x+b'y+c'=0 \dots\dots\dots$ Rovnoběžné právě tehdy když $\bar{n}(a;b)=k \bar{n}'(a';b')$
2. Totožné – je li jedna z nich násobkem druhé => mají stejné c nebo násobek c
3. Různoběžné – normálové vektory nejsou svými násobky

Odchylka dvou přímek:

- přímky svírají vždy pravý nebo ostrý úhel

$$\cos \varphi = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$$

9. NEURČITÝ INTEGRÁL

Primitivní funkce: $F'(x) = f(x)$, $F(x)$ je funkce primitivní k $f(x)$

Neurčitý integrál: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, kde $\int f(x) \cdot dx$ je neurčitý integrál, $f(x) \cdot dx$ je integrant a $F(x) + C$ je primitivní funkce. Integrál je opak derivace.

1.1 ZÁKLADNÍ INTEGRÁLY

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$$

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int c \cdot dx = c \cdot \int dx = cx + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx + C$$

$$\int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx$$

1.2 INTEGRAČNÍ METODY

Substituční metody:

$$\int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \int f(t) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$
$$t = ax + b$$

$$dt = t' \cdot dx = a \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \frac{1}{t} \cdot dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$t = f(x)$$

$$dt = f'(x) \cdot dx$$

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt = F[g(x)] + C$$

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x) \cdot dx$$

Metoda per partes: (po částech)

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' \cdot dx = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$uv = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$\int u'v \cdot dx = uv - \int uv' \cdot dx$$

$$\text{Příklad: } \int x \cdot \cos x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = \cos x \quad u = \sin x \\ v = x \quad v' = 1 \end{array} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx =$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

$$\text{Příklad: } \int \ln x \cdot dx = \int 1 \cdot \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad u = x \\ v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \ln x - x + C$$

$$\text{Příklad: } \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \quad u = e^x \\ v = \sin x \quad v' = \cos x \end{array} \right| = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u' = e^x \quad u = e^x \\ v = \cos x \quad v' = -\sin x \end{array} \right| = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

10. ANALYTICKÁ GEOMETRIE – KRUŽNICE, TEČNA KRUŽNICE

Kružnice je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S této roviny danou vzdálenost r .
středový tvar rovnice - kružnice se středem v bodě S[m;n] a poloměrem r má rovnici:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \quad \text{nebo} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

(druhá rovnice je rovnice kružnice se středem v počátku)

obecná rovnice vzniká úpravou středového tvaru - ve středovém tvaru rovnice nejdříve umocníme závorky a pak členy výrazu na levé straně rovnice sestavíme sestupně podle mocniny:

$$(x^2 - 2xm + m^2) + (y^2 - 2yn + n^2) = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (-2m)x + (-2n)y + (m^2 + n^2 - r^2) = 0$$

dále nahradíme $-2m$, $-2n$ a $m^2 + n^2 - r^2$ neznámými M , N , L a dostaneme:

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$$

kde $M^2 + N^2 - 4L > 0$, S[-1/2M; -1/2N], $r = 1/2\sqrt{M^2 + N^2 - 4L}$

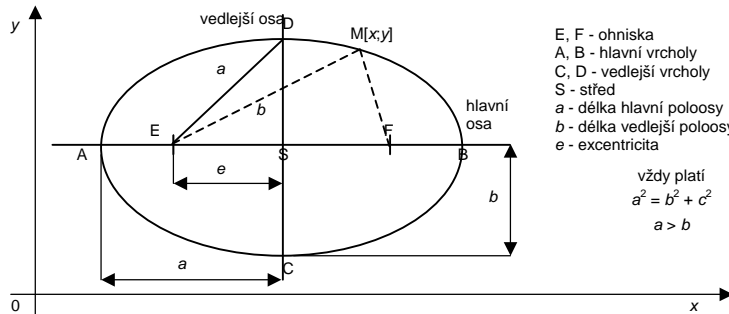
POZOR!!! Rovnice $x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$ NĚmusí být vždy rovnicí kružnice. Zda JE nebo NENÍ, je třeba ověřit převedením na středový tvar, kde musí být $r^2 > 0$.

rovnice tečny kružnice v dotykovém bodě T[x₀;y₀]: $(x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) = r^2$

11. ANALYTICKÁ GEOMETRIE – ELIPSA, TEČNA ELIPSY

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných (různých) bodů E, F konstantní součet vzdáleností větší, než je vzdálenost daných dvou bodů:

$$|EM| + |FM| = 2a$$



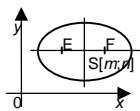
středový tvar rovnice - elipsa se středem $S[m;n]$, jejíž hlavní a vedlejší osa jsou rovnoběžné s osami x, y má rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{nebo} \quad \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

Úpravou (jako u kruž.) osově rovnice získáváme **obecnou rov.:**

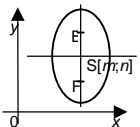
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \text{ kde } A > 0, B > 0, A \neq B$$

POZOR!!! výše uvedená rovnice nemusí být rov. elipsy - nutno ověřit převedením na středový tvar rovnice



$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

rovnice tečny elipsy v dotykovém bodě $T[x_0;y_0]$:

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1 \quad \frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2} = 1$$

12. PARAMETRICKÉ ROVNICE

Lineární rovnice s parametrem:

$$x(t^2 - 1) = t - 1$$

$$x(t-1)(t+1) = t-1$$

$$t \neq 1 \quad \vee \quad t = 1$$

$$x(t+1) = 1 \quad \quad \quad 0 = 0 \Rightarrow K = R$$

$$\begin{array}{lcl}
 t \neq -1 & \vee & t = -1 \\
 x = \frac{1}{t+1} & & 0 \neq 1 \\
 K = \left\{ \frac{1}{t+1} \right\} & & K = \{ \}
 \end{array}$$

Diskuse:

$$\text{pro } t \neq 1, -1 \text{ má } K = \left\{ \frac{1}{t+1} \right\}$$

$$\text{pro } t = 1 \text{ má } K = R$$

$$\text{pro } t = -1 \text{ má } K = \{ \}$$

Kvadratická rovnice s parametrem: $px^2 + bx + c = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4pc$

$$D > 0 \Rightarrow p < \frac{b^2}{4c} \quad x \text{ má 2 řešení}$$

$$D = 0 \Rightarrow p = \frac{b^2}{4c} \quad x \text{ má 1 řešení}$$

$$D < 0 \Rightarrow p > \frac{b^2}{4c} \quad x \text{ nemá řešení v } R$$

U parametrických rovnic s neznámou ve jmenovateli nebo u rovnic, kde umocníme či odmocníme, děláme zkoušku.

13. ROVNICE S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU

iracionální tzn. neznámá je pod odmocninou
provádíme zkoušku

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{6-x} + \sqrt{3x-2} = 4 \quad /(\)^2 \\
 (6-x) + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3x-2} + (3x-2) = 16 \\
 2\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 12 - 2x \\
 \sqrt{(6-x)(3x-2)} = 6 - x \quad /(\)^2 \\
 (6-x)(3x-2) = (6-x)^2 \quad / (6-x) \\
 \begin{array}{lcl}
 6 - x_1 = 0 & & 3x_2 - 2 = 6 - x_2 \\
 x_1 = 6 & \vee & 4x_2 = 8 \\
 & & x_2 = 2
 \end{array} \\
 L_1 = \sqrt{0} + \sqrt{16} = 4 & & L_2 = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \\
 P_1 = 4 & & P_2 = 4 \\
 L_1 = P_1 \Rightarrow K_1 = \{6\} & & L_2 = P_2 \Rightarrow K_2 = \{2\}
 \end{array}$$

14. ANALYTICKÁ GEOM.- HYPERBOLA, TEČNA K HYPER.

DEF: V rovině jsou dány E, F (E≠F) a $\underline{a} \in R$, tak, že $2a < |EF|$, pak množina všech bodů roviny, pro které platí :

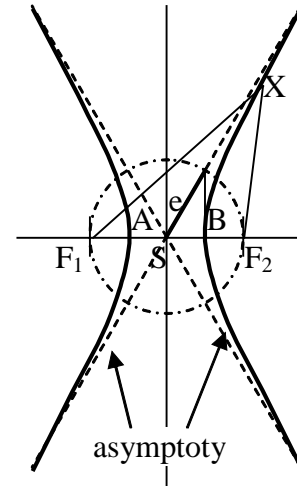
$|XF| = |XE| = 2a$
se nazývá HYPERBOLA

- E, F ohniska
- a hlavní poloosa $|SB| = |SA|$
- $e = \frac{1}{2} |EF|$...excentricita $e^2 = a^2 + b^2$
- A,B.....vrcholy paraboly
- b vedlejší poloosa

H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Asymptoty Hyperboly:

- je-li $a=b$, pak asymptoty jsou na sebe kolmé => ROVNOOŠÁ HYPERBOLA
- $y = kx$
- $k = \text{tg } \alpha = b/a$
- $y = \pm b/a \cdot x$



Hyperbola a přímka:

1. Asymptoty – prochází středem hyp., $y = k \cdot x$
2. Ostatní přímky a) rovnoběžky s asymptotou – 1 spol. bod s H
- stejná směrnice
 $y = k \cdot x + q$
- b) sečna – 2 spol. body
- c) tečna – 1 spol. bod
- d) přímka, která nemá žádný spol. bod a není asympt.

Tečna H se středem S(0;0)

$t_T: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Hyperbola s S(m;n)

H: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Tečna H se středem S(m;n)

$t_T: \frac{(x-m)(X_1-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(Y_1-n)}{b^2} = 1$

Př. Napište rovnici H, která má vrcholy A[0;-3], B[-4;-3] a jedno ohnisko F₁[-5;-3].

- z grafu odečteme souřadnice S, F₂, e, a...dopočítáme b.
- $e=3, a=2$
- $S[-2;-3] \quad b^2 = e^2 - a^2$

$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$

15. ÚPRAVY VÝRAZŮ

Algebraický výraz – zápis který je je správně vytvořený z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Neobsahuje li odmocniny, nazývá se **racionální algebraický výraz (X iracionální alg. výraz)**

Mnohočleny (=polynomy) – racionální celistvé výrazy

$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$; kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1 \dots a_2$ jsou reálná čísla, x proměnná, n je stupeň polynomu, jednotliví sčítanci se nazývají členy polynomu.

Operace s mnohočleny:

Sčítání: sečteme koeficienty u členů se stejným exponentem

Odečítání: odstraníme závorky a sečteme koeficienty u členů se stejným exponentem

Násobení: roznásobíme závorky a to tak že každý člen v první závorce roznásobíme s každým členem v druhé závorce a sečteme koeficienty u členů se stejným exp.

$$(3x^2+2x) \cdot (5x-3) = 15x^3 - 9x^2 + 10x^2 - 6x = \underline{15x^3 + x^2 - 6x}$$

Dělení: - Dělelce i dělitele uspořádáme sestupně

- Vydělíme první člen dělitele a výsledný polynom odečteme od dělelce a získáme dělelce pro další postup.

- Opakujeme tento postup vždy s novým dělelce tak dlouho, až je zbylý polynom nižšího stupně než dělitel.

- Uvedeme podmínky => dělitel musí být různý od nuly

$$\begin{array}{r} (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x-4} \\ -(x^3 - 4x^2) \\ \hline -x^2 + 5x - 2 \\ -(-x^2 + 4x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 4) \\ \hline 2 \dots\dots \text{Zbytek} \end{array} \quad \text{podmínky: } x \neq 4$$

Rozklady: vyjádření mnohočlenu jako součin mnohočlenů nižšího stupně

a) využitím binomických vzorců

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

b) rozkladem kvadratického trojčlenu na součin druhé mocniny dvojčlenu

$$ax^2 + bx + c = (x+x_1)(x-x_2) \quad \text{resp. } x^2 + px + q = (x-x_1)(x-x_2) \quad \text{kde}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

c) vytýkáním

$$3x^3 + 4x^2 - 2x = x(3x^2 - 4x - 2) = x[x(x-4)-2]$$

Při úpravách výrazů využíváme poznatků o mocninách, odmocninách, zlomcích a mnohočlenech tak, abychom výraz převedli na co nejjednodušší tvar. **Podmínky**, které stanovují, kdy jsou výrazy definovány, jsou **nutnou součástí řešení**.

!!!Ve zlomku můžeme krátit jen v případě součinu !!!

16. ANALYTICKÁ GEOM. – PARABOLA

DEF: V rovině je dán bod F a přímka q, $F \in q$. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a přímky q, se nazývá **PARABOLA**.

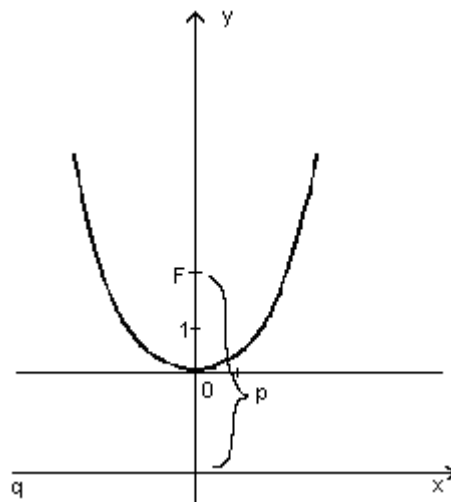
F..... ohnisko paraboly

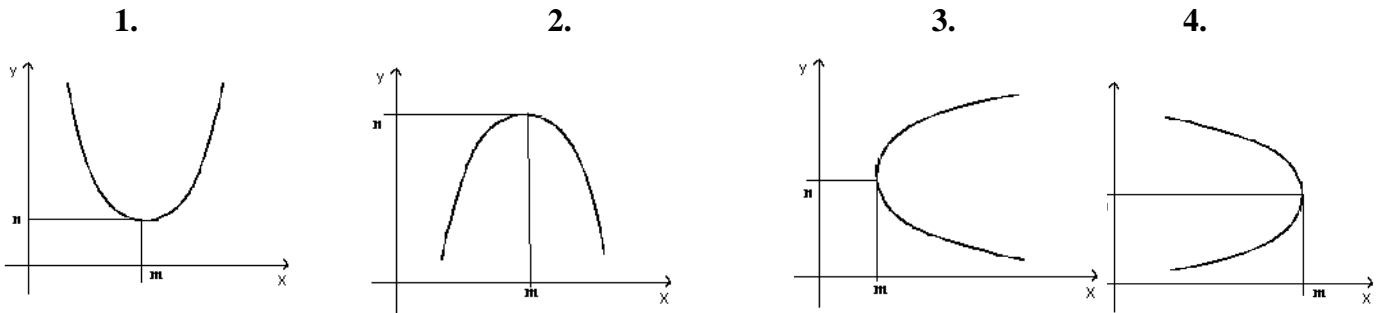
q..... řídicí přímka paraboly

p..... Parametr paraboly => vzdálenost $|Fq| = 2|FV|$

$$\mathbf{P: } x^2 = 2py$$

$$\mathbf{t_T: } x \cdot x_0 = p(y + y_0)$$





Vrcholové rovnice paraboly:

1. $P: (x-m)^2 = 2p(y-n)$
 y_0-2n

2. $P: (x-m)^2 = -2p(y-n)$

3. $P: (y-n)^2 = 2p(x-m)$

4. $P: (y-n)^2 = -2p(x-m)$

$t_T: (x-m)(x_0-m) = p(y-n)+p(y_0-n) \Rightarrow p(y+$

$t_T: (x-m)(x_0-m) = -p(y+y_0-2n)$

$t_T: (y-n)(y_0-n) = p(x+x_0-2n)$

$t_T: (y-n)(y_0-n) = -p(x+x_0-2n)$

Obecná rovnice paraboly:

$$x^2 = 2py$$

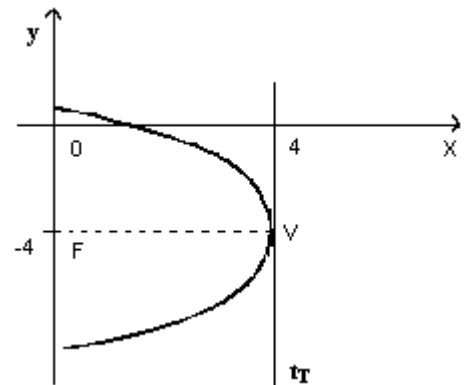
$$\underline{x^2 - 2py = 0}$$

Př. Napište rovnici paraboly, jejíž ohnisko je $F[0;-4]$, tečna ve vrcholu V má rovnici $x-4=0$.

- $t_T: x=4$; $p=2|FV|=8$
 - $V[4;-4]$

$P: (y-n)^2 = -2p(x-m)$

$P: (y+4)^2 = -16(x-4)$



17. VÝRAZY S ODMOCNINOU

Ve výrazu \sqrt{x} platí: $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq 0 \Rightarrow$ při počítání výrazů s odmocninou **musíme** vždy uvést **podmínky**.

Vzorce pro počítání s iracionálními výrazy:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$

3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

4. $b = \sqrt[n]{a} \Rightarrow b^n = a$

$$5. \quad \sqrt[n]{\frac{m}{a}} = \frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[n]{a}}$$

$$6. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Pokud je **mocnina ve jmenovateli** zlomku, musíme zlomek **usměrnit**:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Slučovat lze pouze souhlasné odmocniny, odmocnit součet a rozdíl nelze.

$$\text{Částečné odmocňování: } \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$$

18. VEKTOROVÁ ALGEBRA

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a jsou určeny počátečním a koncovým bodem.

Operace s vektory:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\text{Vektor opačný: } -\vec{u} = (-u_1, -u_2)$$

$$\text{Součet (rozdíl) vektorů: } \vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$$

$$\text{Skalární součin: } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = u_1 v_1 + u_2 v_2 - \text{výsledkem je skalár}$$

- násobením nenulového vektoru B-A číslem je vektor C-A přičemž platí

$$- |AC| = k |AB|$$

$$- k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2) \dots \dots \dots \text{výsledkem je vektor}$$

- je-li $k \geq 0$, bod C \in polopřímce AB

- je-li $k < 0$, bod C \in opačné polopřímce k pol. AB

- násobkem nulového vektoru je nulový vektor

- a. \vec{u} + b. \vec{v} + c. \vec{w} Lineární kombinace vektorů (a,b,c \in R)

$$\text{Vektorový součin: } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2) \dots \dots \dots \text{výsledkem je vektor}$$

$$\text{Úhel dvou vektorů: } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Nalezení kolmého vektoru: - dva vektory jsou kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

19. KOMBINACE

Bez opakování: neuspořádaná (nezáleží na pořadí) k -tice sestavená z n prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše jednou.

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad n > k$$

Př. Kolika způsoby lze vybrat dvě karetní barvy? (srdce, káry, kříže, píky)

- Vytváříme dvouprvkové kombinace ze 4 možných barev

$$C_2(4) = 6$$

S opakováním: neuspořádaná k -tice sestavená z n prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše k -krát

$$C_k^s(n) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} \quad n > k$$

Př. V prodejně mají 4 druhy čokolád. Kolika způsoby lze zakoupit 7 čokolád?

Jedná se o kombinace sedmé třídy ze 4 prvků s opakováním

$$C_7(4) = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$

20. VYUŽITÍ PYTHAGOROVY VĚTY

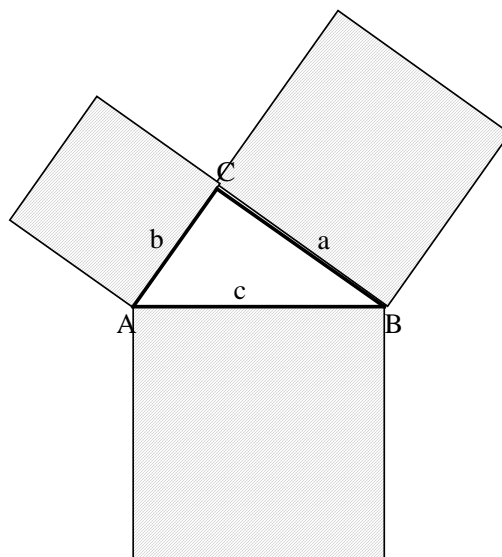
Znění: Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců sestřených nad oběma odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku.

Zápis: $c^2 = a^2 + b^2$

Obrácená Pythagorova věta: Je-li Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů čtverců sestřených nad oběma odvěsnami, pak je tento trojúhelník pravý.

Využití:

Konstrukce úseček délek $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$... atd
Počítání v pravoúhlém trojúhelníku.



21. KOMBINAČNÍ ČÍSLA, KOMBINAČNÍ ROVNICE

Kombinační číslo: (čteme „ n nad k “)

- Pro všechna celá nezáporná čísla n , k kde $n \geq k$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Základní vztahy mezi komb. čísly:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Kombinační rovnice:

Př.

$$\binom{10}{4} x = \binom{12}{6}$$

$$\frac{10!}{4!6!} x = \frac{12!}{6!6!}$$

$$210x = 924$$

$$x = 4,4$$

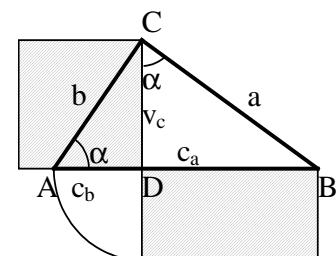
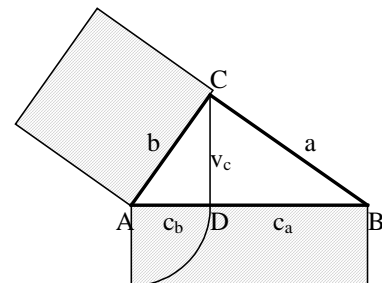
22. VYUŽITÍ EUKLIDOVÝCH VĚT

1. Euklidova věta o odvěsně - obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z celé přepony a úseku přilehlého k dané odvěsně.

$$\begin{aligned} a^2 &= c \cdot c_a \\ b^2 &= c \cdot c_b \end{aligned}$$

2. Euklidova věta o výšce - obsah čtverce sestrojeného nad výškou trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků přepony.

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$



23. VLASTNOSTI FUNKCE

Def: Funkce na množině $a \subset \mathbb{R}$ je předpis, který každému číslu z a přiřadí právě jedno číslo z množiny \mathbb{R} .

$D_{(f)}$definiční obor f-ce

$H_{(f)}$obor hodnot f-ce

$f_{(-1)} = 2$ funkční hodnota f-ce v bodě -1 má hodnotu 2

Graf funkce: graf funkce f v soustavě Oxy je množina všech bodů x , jejichž souřadnice jsou $X[x, f(x)]$, $x \in D$.
Obor hodnot funkce: je množina všech čísel $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje alespoň jedno $x \in D$.

Monotónnost f-ce:

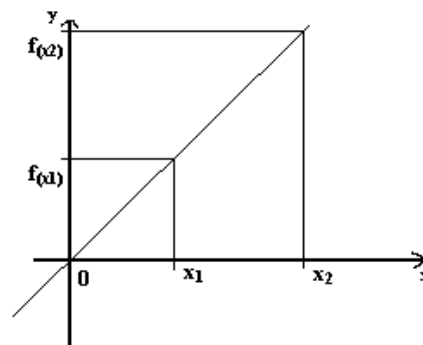
Rostoucí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $x_1, x_2 \in D$

Klesající: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $x_1, x_2 \in D$

Nerostoucí: $\forall x_1, x_2 \in D$; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Neklesající: $\forall x_1, x_2 \in D$; $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Jestliže je f-ce v celém svém průběhu rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající, říkáme, že je **monotónní**.



Omezená shora: $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq h$

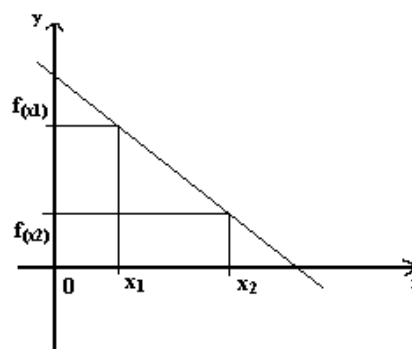
Omezená zdola: $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq h$

Jestliže je f-ce omezená shora i zdola, říkáme, že je **omezená**.

Maximum v a: $\forall x \in D; f(x) \leq f(a)$

Minimum v a: $\forall x \in D; f(x) \geq f(a)$

Prostá: právě když neexistuje žádná rovnoběžka s osou x, která by obsahovala 2 a více bodů grafu.



Sudá: Když je graf f-ce souměrný podle osy y

$$\forall x \in D: f(-x) = f(x)$$

Lichá: Graf je souměrný podle počátku

$$\forall x \in D: f(-x) = -f(x)$$

24. BINOMICKÁ VĚTA

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK:

$n = 0$	$\binom{0}{0}$	1
$n = 1$	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$	1 1
$n = 2$	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$	1 2 1
$n = 3$	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n = 4$	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

25. KVADRATICKÁ ROVNICE

Předpis: $ax^2 + bx + c = 0$

ax^2 ...kvadratický člen $a \neq 0; a \in \mathbb{R}$
 bx ...lineární člen $b \in \mathbb{R}$
 c ...absolutní člen $c \in \mathbb{R}$

a, b ... koeficienty členů

Způsoby řešení: 1. V součinnovém tvaru
 2. Řešení ryze kvadratické rovnice
 3. Pomocí vzorců pro diskriminant a kořeny
 4. Grafické řešení

1. Součinnový tvar

$$(x+2)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$x+2=0 \quad 3x-1=0$$

$$\underline{x=-2} \quad \underline{x=1/3}$$

$$\underline{\mathbf{K}=\{-2; 1/3\}}$$

2. Ryze kvadratická rovnice

- nemá lineární člen: $ax^2 + c = 0$
 $ax^2 = -c$
 $x^2 = -c/a$

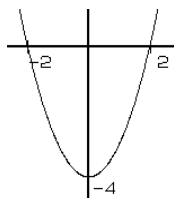
$$\mathbf{x_1, x_2 = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

3. Diskriminanty u obecné kv. Rovnice:

- $ax^2 + bx + c = 0$;
- určíme diskriminant podle vzorce $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$; vypočítáme kořeny
- počet kořenů ovlivňuje hodnota diskriminantu:
 - Pro $\mathbf{D > 0}$ jsou řešením dva kořeny
 - Pro $\mathbf{D = 0}$ je řešením právě jeden dvojnásobný kořen
 - Pro $\mathbf{D < 0}$ nemá kvadratická rovnice v \mathbb{R} žádné řešení

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

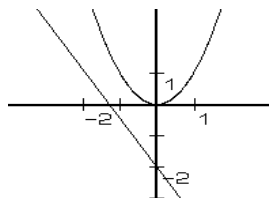
4. Grafické řešení



$$\mathbf{x^2 - 4 = 0}$$

$$\mathbf{x^2 = 4}$$

$$\underline{\mathbf{x = \pm 2}}$$



$$\mathbf{2x^2 + 3x + 4 = 0}$$

$$\mathbf{y = x^2 \Leftrightarrow y = -1,5x + 2}$$

$$\underline{\mathbf{rovnice nemá řešení}}$$

Vlastnosti kořenů kv. rovnice

1. **Vietovy vzorce** – rovnici musíme převést na normovaný tvar $\Rightarrow a=1$, pak platí:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\mathbf{x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)}$$

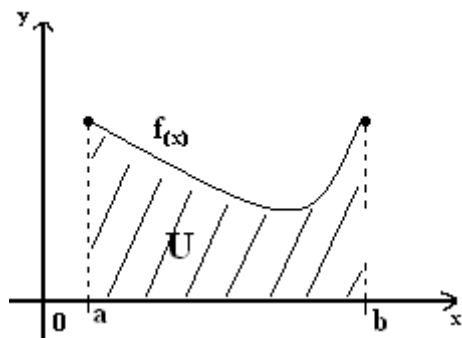
2. **Vlastností kořenů obecné kv. rovnice** – má-li kv. rovnice kořeny x_1, x_2 pak platí:
 $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2) = 0$

26. URČITÝ INTEGRÁL

- „Newtonův integrál“

Geometrický význam: udává obsah útvaru U, který je dán čísly a, b a $f(x)$, ohraničeného grafem f-ce f, osou x a přímkami $x=a$ a $x=b$.

1. Obsahy rovinných útvarů
2. Objemy a povrchy rotačních těles



$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{„Newtonův – Leibnizův vzorec“}$$

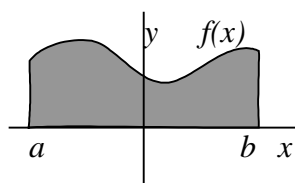
integrand prim. F-ce meze integrálu(horní, dolní)

- **V₁**: Je-li F v $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná :

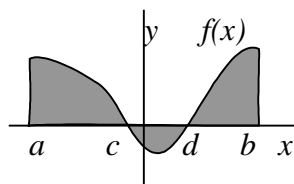
$$\int_a^b f(x) \cdot dx \geq 0; \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

- při výpočtech je možné použít metodu substituce i metodu „Per Partes“
- u substituce je třeba přepočítat meze

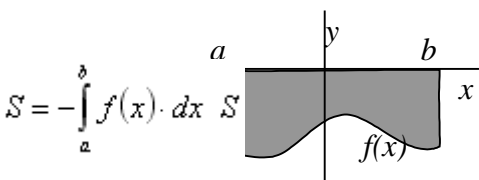
Aplikace určitého integrálu:



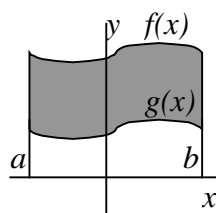
$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$



$$S = \int_a^c f(x) \cdot dx - \int_c^d f(x) \cdot dx + \int_d^b f(x) \cdot dx$$



$$S = - \int_a^b f(x) \cdot dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$$

Objemy a povrchy rotačních těles:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$$

27. LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE:

je každá funkce daná předpisem:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}; a, b, c, d \text{ jsou reálná čísla, } c \neq 0 \text{ a } ad - bc \neq 0$$

$$D = R - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

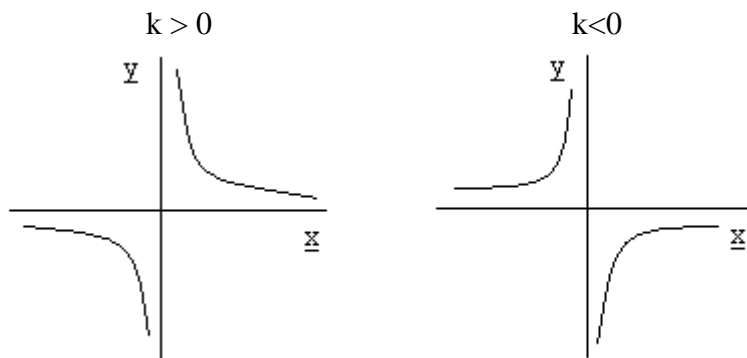
Grafem je hyperbola

Nejjednodušším typem je nepřímá úměrnost:

NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

$$y = \frac{k}{x}; k \in R, k \neq 0$$

$$D = R - \{0\}; H = R - \{0\}$$



-klesající v celém D

-rostoucí v celé D

-není omezená shora ani zdola, nemá maximum ani minimum, je lichá

U složitějších funkcí vydělíme čitatele jmenovatelem a funkci zapíšeme ve tvaru např.

$$y = 1 + \frac{3}{x-2}$$

-grafem této funkce je graf funkce $y = \frac{3}{x}$ posunutý o 2 doprava ve směru osy x a o 1 nahoru

ve směru osy y

-přímky $x = 2$ a $y = 1$ se nazývají asymptoty dané funkce

28. ARITMETICKÁ POSLOUPNOST:

POSLOUPNOST

Posloupnost je zobrazení všech přirozených čísel do množiny všech reálných čísel

(nekonečná posloupnost reálných čísel) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Posloupnost je zobrazení prvních n přirozených čísel do \mathbb{R} (**konečná** posloupnost \mathbb{R})

$$\{a_n\}_{n=1}^k = a_1, a_2, \dots, a_k.$$

Posloupnost rostoucí: $r < s \Leftrightarrow a_r < a_s$ $r, s \in \mathbb{N}$

Posloupnost klesající: $r < s \Leftrightarrow a_r > a_s$ $r, s \in \mathbb{N}$

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

$a_{n+1} = a_n + d$, d diferenciál

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ – jakýkoliv člen posloupnosti je aritmetickým průměrem členu

předcházejícího a následujícího

N -tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Součet prvních n členů: $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

29. GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad q \neq 0$$

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

N -tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Součet prvních n členů: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $q \neq 1$

VYUŽITÍ POSLOUPNOSTI

Úročitel: $r = 1 + p$, p přírůstek (%)

Pravidelný růst: $a_n = ar^n$, a počátek

Růst s příspěvkem: $a_n = ar^n + b \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, b příspěvky

Jednoduché úrokování (vkládáme po měsíci): $a_n = n \cdot a + a \cdot p \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{n(1+n)}{2}$

Složité úrokování (roční): $a_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

30. FUNKCE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU:

Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $|a|$, pro které platí:

-je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$

-je-li $a < 0$, je $|a| = -a$

-při sestřování grafu funkce s absolutními hodnotami absolutní hodnota funkce převrací zápornou část funkce do kladné části

-u vnořených absolutních hodnot postupujeme od vnitřku k vnějšku

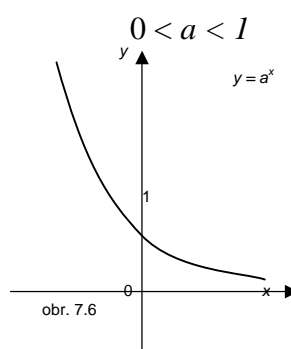
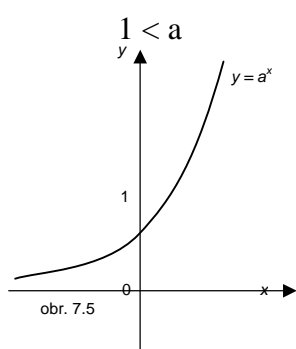
-složitější funkce s absolutními hodnotami rozdělujeme funkci na několik částí a graf potom poskládáme z grafů jednotlivých částí

31. Exponenciální funkce

Funkci ve tvaru $f: y = a^x$, kde a je větší než nula a různé od 1 nazýváme exponenciální funkcí o základu a . Jejím grafem je **exponenciální křivka (exponenciála)**.

Definiční obor – $x \in \mathbb{R}$

Obor hodnot – $y \in (0; \infty)$



Grafy procházejí bodem 1 na ose y

Vlastnosti exponenciální funkce:

a) pro $a > 1$

- není sudá, ani lichá
- je omezená zdola, rostoucí, prostá
- nemá minimum ani maximum
- inverzní funkce k funkci logaritmické

b) pro $a \in (0; 1)$

- není sudá ani lichá
- je omezená zdola nulou, není omezená shora
- je klesající, prostá, nemá maximum ani minimum
- je inverzní k funkci logaritmické

32. Nekonečné řady

Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, která má členy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, pak výraz

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**.

Číslům $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se říká **členy nekonečné řady**.

Zápis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Výpočet:

Je-li $|q| < 1$, pak je nekonečná geometrická řada konvergentní a její součet se spočítá ze vzorce:

$$S = a_1 / (1 - q)$$

Je-li $|q| \geq 1$, pak je nekonečná geometrická řada divergentní.

33. Exponenciální rovnice

Rovnice, v nichž se neznámá vyskytuje v mocniteli (exponentu).

$$a^x = b$$

Základní postup:

1. Pokusíme se převést rovnici na tvar, kdy na levé i pravé straně je mocnina o stejném základu, dořešíme podle vztahu:

$$\begin{aligned} a^{x_1} &= a^{x_2} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Př.: } 4^x &= 2^{3x-1} \\ 2^{2x} &= 2^{3x-1} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

2. Není-li možné nalézt mocniny o stejném základu, tak rovnici zlogaritmuje.

$$\begin{aligned} \text{Př.: } 2x \cdot 3^{x-1} &= 6 \\ 2x \cdot 3^{x-1} / 3 &= 6 \\ 6x &= 18 \\ \log 6x &= \log 18 \\ x \log 6 &= \log 18 \\ x &= \log 18 / \log 6 \end{aligned}$$

3. Jestliže ax je argumentem další funkce, řešíme rovnici pomocí substituce

34. Limita posloupnosti

Definice:

1. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě, když existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \epsilon$, toto číslo a se nazývá limita posloupnosti
2. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě, když existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \in (a - \epsilon; a + \epsilon)$, toto číslo a se nazývá limita posloupnosti
3. posloupnosti, které nejsou konvergentní jsou divergentní.

Př.: $(-1)^n$ (pro lichá n nabývá hodnoty -1 , pro sudá n hodnoty 1 , neblíží se tedy k žádné hodnotě a , která by mohla být její limitou)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ pro $n \rightarrow \infty$

Základní vlastnosti limit:

- každá posloupnost má nejvýše jednu limitu
- každá konvergentní posloupnost je omezená
- součet, rozdíl, součin a podíl konvergentních posloupností jsou konvergentní posloupnosti, pro jejichž limity platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b; \quad b \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a; \quad c \in \mathbb{R}$$

35. Logaritmické rovnice a nerovnice

Nejjednodušším případem logaritmické rovnice je rovnice $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, b patří \mathbb{R}

Jež má podle definice logaritmu řešení $x = a^b$

Složitější logaritmickou funkci řešíme tak, že ji upravíme na rovnici tvaru

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Kde výrazy $f(x)$, $g(x)$ vyjadřují funkční hodnoty dvou daných funkcí f , g proměnné x , z nichž jedna může být speciálně konstanta. Protože logaritmická funkce je prostá (rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$), z logaritmické rovnice nahoře pak plyne $f(x) = g(x)$. Tyto rovnice jsou však ekvivalentní jen při splnění podmínek: $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$.

Pokud je nestanovíme předem, musí být nutnou součástí řešení zkouška.

Podmínky pro logaritmus i pro jmenovatele.

Odlogaritmovat mohou pouze tehdy, pokud mají logaritmy stejný základ.

rovnice:

$$\frac{\log x}{\log(3x+5)} = 1$$

podmínky

$$x > 0 \quad \wedge \quad 3x+5 > 0 \quad \wedge \quad \log(3x+5) \neq 0$$

$$\log x = \log(3x+5)$$

$$x > -\frac{5}{3}$$

$$\log(3x+5) \neq \log 1$$

$$x = 3x+5$$

$$x \neq -\frac{4}{3}$$

$$x = -2,5 \quad K = \{ \}$$

36. Limita, spojitost funkce

Definice limity funkce:

Říkáme, že funkce má v bodě a patřící R limitu b patřící R , právě když:

1. funkce f je definována v nějakém okolí bodu a , popřípadě s výjimkou samého bodu a
2. k libovolnému okolí $U(b)$ bodu b existuje taková okolí $U(a)$ bodu a , že pro všechna x patřící $D(f)$, kde $x \neq a$, platí
 x patřící $U(a) \rightarrow f(x)$ patří $U(b)$.

Limita posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnou (vlastní) limitu a právě tehdy, když ke každému libovolně zvolenému kladnému ε existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zápis: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad a \in R$. Je-li konečné číslo reálné, tedy jedná se o vlastní

limitu, je posloupnost **konvergentní**. Nemá-li konečnou limitu je **divergentní**.

Limita funkce: Funkce f má v bodě a limitu L , jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu a takové $\forall x \in U(a) - \{a\}, f(x) \in U(L)$. Zápis: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Limita zleva: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$, **zprava:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Nevlastní limita: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

Limita v nevlastním bodě: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Věty o limitách: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{konst.} \cdot a_n) = \text{konst.} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Neurčitě výroky: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$

SPOJITOST FUNKCE

Okolí bodu: $(a - \delta, a + \delta) \quad \delta > 0$ nebo $|x - a| < \delta$, zápis $U(a, \delta)$

Levé okolí bodu: $(a - \delta, a) \quad \delta > 0$

Funkce f je spojitá v bodě a , jestliže k libovolně zvolenému okolí $f(a)$ existuje okolí bodu a takové, že $\forall x \in U(a); f(x) \in U(f(a))$.

Funkce f je spojitá v intervalu (a, b) , je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, je-li spojitá na (a, b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Funkce f je spojitá v bodě a , má-li v tomto bodě limitu.

37. Geometrie v rovině

a. PODOBNOST

Pro každé body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí: $|X'Y'| = k|XY|$

$k > 1$ zvětšení

$k = 1$ shodnost

$k < 1$ zmenšení

V podobném trojúhelníku platí, že ve stejném poměru jsou i výšky, těžnice, střední příčky, poloměry kružnice opsané i vepsané, ...

2 trojúhelníky jsou si podobné shodují-li se ve dvou úhlech nebo v 1 úhlu a poměru stran svírajících tento úhel.

b. STEJNOLEHLOST $H(S; \kappa)$

Pro každé X platí: $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$, kde S je střed stejnolehlosti a κ je koeficient stejnolehlosti.

Přímka se zobrazí na přímku rovnoběžnou.

ROVINNÉ ÚTVARY

Trojúhelník: $O = a + b + c$

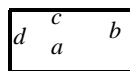
$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

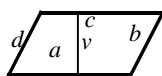
Obdélník: $O = 2(a+b)$

$$S = ab$$



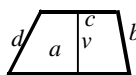
Rovnoběžník: $O = 2(a+b)$

$$S = a \cdot v_a$$



Lichoběžník: $O = a + b + c + d$

$$S = \frac{(a+c)v}{2}$$



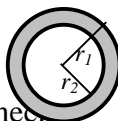
Pravidelný n -úhelník: $S = n \cdot S_{\Delta ABS}$ – n -krát obsah jednoho trojúhelníka

Kruh: $O = 2\pi r$

$$S = \pi r^2$$



Mezikruží: $S = |\pi r_1^2 - \pi r_2^2|$




Oblouk: $O = r\varphi$ – úhel v radiánech



Výseč: $S = \frac{r^2}{2} \varphi$



Úseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin \varphi$ – obsah výseče minus obsah trojúhelníku 

Euklidova veta o výšce

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou useku přepony.

V^2 je obsah čtverce o straně délky v , $c_a \cdot c_b$ je obsah obdélníku jehož strany mají délky c_a , c_b . Proto je možné formulovat také takto:

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka se rovna obsahu obdélníku sestrojeného z obou useku přepony.

Euklidova veta o odvěsně

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého useku.

Pythagorova veta

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovna součtu obsahu čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami

$$A^2 + B^2 = C^2.$$

38. Derivace funkce

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

y' ... 1. derivace

y'' ... 2. derivace

$y^{(6)}$... 6. derivace

Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci je v bodě x_0 spojitá. Obrácená věta neplatí

Funkce f má derivaci v $\langle a, b \rangle$, má-li derivaci v každém bodě (a, b) , v bodě a má derivaci zprava a v bodě b zleva.

Je-li funkce f definována v nějakém okolí bodu x_0 a existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, má funkce f

v bodě x_0 derivaci zleva. (Obdobně platí pro derivaci zprava).

Derivace:

$$c' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

goniometrické fce: $(\sin x)' = \cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad x \in R - \{k\pi\}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

s konstantou: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

sčítání: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

násobení: $(uvz)' = u'vz + uv'z + uvz'$

dělení: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

složená fce: $(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

exponenciální fce: $(e^x)' = e^x$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

logaritmické fce: $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

implicitní funkce: $y = x^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) \cdot y$$

$$y' = (\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) \cdot x^{\sin x}$$

vyšší derivace: $y'' = (y')'$

Derivujeme tak, že členy obsahující x derivujeme normálně a členy obsahující y derivujeme podle y a násobíme y' .

GEOMETRICKÝ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM DERIVACE

Fyzikální: derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost, 2. derivace dráhy podle času je okamžité zrychlení

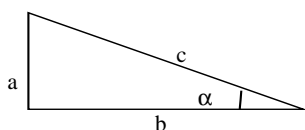
Geometrický: 1. derivace funkce v bodě dotyku je směrnice tečny $y'(x_0) = k_t$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$k_t k_n = -1$$

39. Goniometrické funkce

DEFINICE NA PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

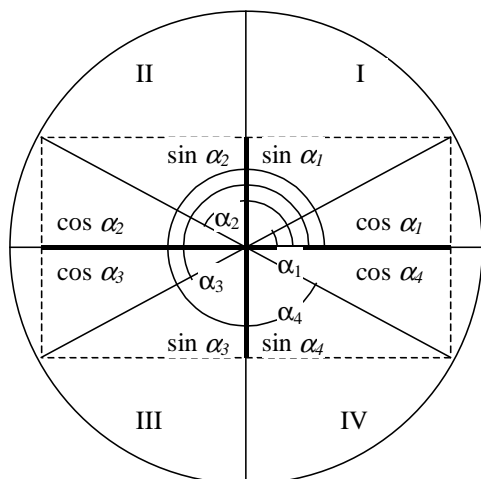
$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI



$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$$

$$\alpha_3 = 180^\circ + \alpha_1$$

$$\alpha_4 = 360^\circ - \alpha_1$$

II. kvadrant: $\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1$

$$\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$$

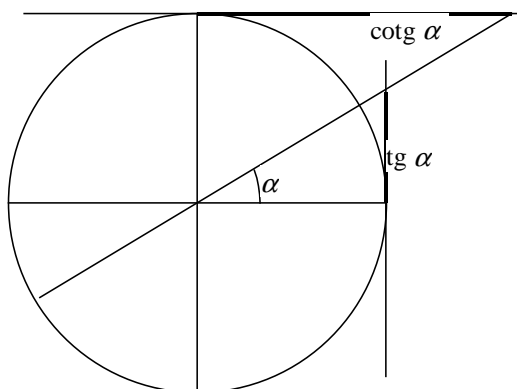
III. kvadrant: $\sin \alpha_3 = -\sin \alpha_1$

$$\cos \alpha_3 = -\cos \alpha_1$$

IV. kvadrant: $\sin \alpha_4 = -\sin \alpha_1$

$$\cos \alpha_4 = \cos \alpha_1$$

perioda je 2π



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{lichá funkce}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{sudá funkce}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \text{funkce lichá}$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha \quad \text{funkce lichá}$$

perioda je π

ZÁKLADNÍ ÚHLY

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	E
$\operatorname{cotg} \alpha$	E	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Doplňkový úhel: $\alpha' = 90^\circ - \alpha$

$$\sin \alpha = \cos \alpha'$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha'$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha'$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'$$

OBLOUKOVÁ MÍRA

1 rad je středový úhel, který přísluší oblouku jednotkové kružnice, jehož délka je 1.

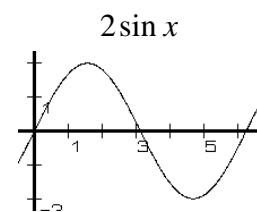
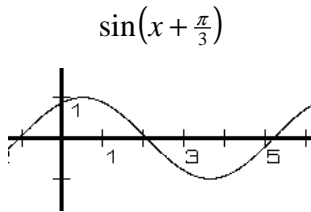
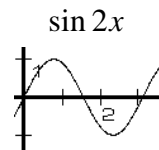
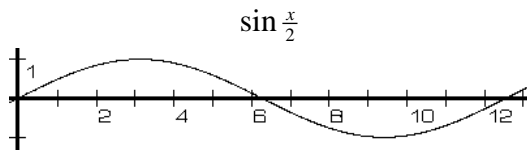
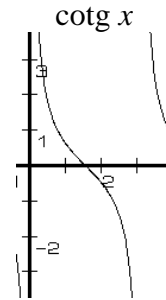
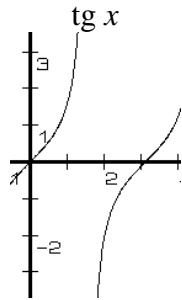
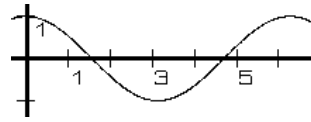
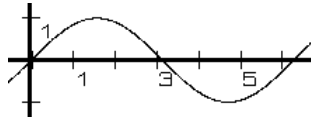
$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,81''$$

$$360^\circ = 2\pi$$

GRAFY FUNKCÍ

$\sin x$

$\cos x$



VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Součtové vzorce: $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
 $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}$$

Dvojnásobný úhel: $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Poloviční úhel: $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ \leftarrow znaménko se určí podle kvadrantu

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Součtové věty: $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Převody přes liché násobky $\pi/2$: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

40. Tečna ke grafu

Geometrický význam derivace:

1. derivace funkce v bodě dotyku je směrnice tečny

$$y'(x_0) = k_t$$

$$k_t = \operatorname{tg} \alpha$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Př.: Zapište rovnici tečny funkce f v bodě T.

$$f: y = 2 \sin x \quad T[0, ?]$$

1) dosazením x-ové souřadnice bodu T získáme y-ovou souřadnici téhož bodu

$$y = 2 \sin 0 \rightarrow y = 0$$

bod T má tedy souřadnice T[0,0]

2) první derivací funkce v bodě T získáme směrnici

$$y' = 2 \cos 0 \rightarrow k_t = 2$$

3) získanou směrnici dosadíme do rovnice tečny $y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y - 0 = 2(x - 0) \rightarrow \underline{2x - y = 0}$$

41. Goniometrické výrazy – viz goniometrické funkce

42. Vyšetřování průběhu funkce

c. MONOTÓNNOST FUNKCE

Rostoucí: jestliže je v každém bodě intervalu první derivace kladná ($f'(x) > 0$)

Klesající: je-li v každém bodě 1. derivace záporná ($f'(x) < 0$)

Příklad: $y = x^3 - 3x$

$$y' = 3x^2 - 3$$

rostoucí: $3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow (-\infty, -1), (1, +\infty)$

klesající: $3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow (-1, 1)$

d. EXTRÉMY FUNKCE

Funkce má v x_0 maximum právě tehdy, existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro každé x náležející do tohoto okolí platí, že funkční hodnota je menší nebo rovna funkční hodnotě funkce v x_0 . Obdobně platí i pro minimum funkce.

Stacionární body: $f'(x)=0$ – v těchto bodech má funkce lokální minimum (pokud je $f''(x)>0$) nebo maximum ($f''(x)<0$). Pokud je druhá derivace ve stacionárním bodě rovna nule, nejedná se o extrém.

Inflexní bod: $f''(x)=0$ – nelze udělat tečnu, funkce konkávní přechází na konvexní.

konkávní funkce: $f''(x)<0$ – celý graf leží pod tečnou

konvexní funkce: $f''(x)>0$ – celý graf leží nad tečnou

e. VYŠETŘENÍ PRŮBĚHU FUNKCE

- 1) Určit definiční obor funkce
funkce sudá, lichá, periodická
- 2) Body, v nichž není definována, ale má v nich limitu zprava a zleva
Limita v nevlastních bodech
- 3) Průsečíky s osami x, y
Znaménka funkčních hodnot
- 4) Výpočet I. derivace
Nulové body I. derivace – stacionární body
Body, v nichž není derivace definována
- 5) Intervaly monotónnosti
- 6) Výpočet II. derivace
Nulové body II. derivace – inflexní body
Body, v nichž není derivace definována
- 7) Lokální extrémy
Intervaly konvexnosti a konkávnosti
- 8) Asymptoty
 $y = ax + b$
$$a = k_{as} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$
- 9) Obor hodnot funkce
- 10) Graf funkce

Příklad: $f : y = x^3 - 6x^2 + 9x$

- 1) $D=\mathbb{R}$
 $f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x = -(x^3 + 6x^2 + 9x)$ – ani sudá, ani lichá
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$
- 3) průsečík s x : $y = 0$
$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3 \quad [0,0], [3,0]$$

průsečík s y : $x = 0$
$$y = 0$$

$$[0,0]$$
- 4) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

stacionární body: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

5) rostoucí: $y' > 0 \Rightarrow (-\infty, 1), (3, +\infty)$

klesající: $y' < 0 \Rightarrow (1, 3)$

6) $y'' = 6x - 12$

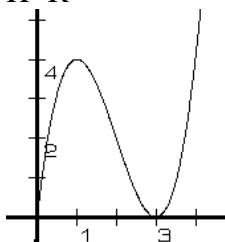
inflexní body: $y'' = 0 \Rightarrow x = 2$

7) $y''(1) = -6$ – lokální maximum $[1, 4]$ $y''(3) = 6$ – lokální minimum $[3, 0]$

konvexní: $y'' > 0 \Rightarrow (2, +\infty)$ konkávní: $y'' < 0 \Rightarrow (-\infty, 2)$

8) $k_{as} = \lim_{x \rightarrow \infty} b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$

9) $H = \mathbb{R}$



10)

43. Pravděpodobnost

Pravděpodobnost se zabývá studiem zákonitostí, které se projevují v náhodných pokusech. **Náhodný pokus** je činnost, při které je výsledek závislý na náhodě a neumíme ho předem určit (hod kostkou, výběr karty z balíčku...). Místo toho jsme schopni určit pravděpodobnost, se kterou jeden z možných výsledků nastane.

Množina všech možných výsledků náhodného pokusu se značí Ω a její prvky ω (nazýváme je **elementárními** = dále nerozložitelnými a reprezentují **elementární jevy**). Jakoukoliv podmnožinu Ω nazveme **náhodným jevem**, což je vlastně tvrzení, o kterém po skončení pokusu **musíme být schopni říci**, zda je pravdivé (jev nastává) nebo nepravdivé (jev nenastává). **Jistý jev** je představován celou množinou Ω a **nemožný jev** je reprezentován prázdnou množinou \emptyset .

př. Házíme šestihrannou hrací kostkou. Množina $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, elementárními jevy jsou *padne 1, padne 2, ..., padne 6*. Množina Ω vyjadřuje jistý jev *padne jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6*. Jev *padne číslo 8* je jevem nemožným. Jedním z možných náhodných jevů je jev *padne sudé číslo nebo padne 2 nebo 4*.

Základní vztahy a operace:

A je podjevem jevu B	$A \subset B$	A nastává vždy, když nastane jev B <i>př. A: padne 2, B: padne sudé číslo</i>
jev A je roven jevu B	$A = B$	A nastává vždy, když nastane jev B a obráceně neboli $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ <i>př. A: padne 1 nebo 3 nebo 5, B: padne liché číslo</i>
sjednocení jevů A, B	$A \cup B$	nastane jev A nebo jev B <i>př. A: padne 1 nebo 2, B: padne 5, $A \cup B$: padne 1 nebo 2 nebo 5</i>
průnik jevů A, B	$A \cap B$	nastane jev A a zároveň jev B <i>př. A: padne 1 nebo 4, B: padne 4 nebo 5, $A \cap B$: padne 4</i>

opačný (doplňkový) jev k A	A'	nastane práve tehdy, když nenastane jev A <i>př. A: padne 1 nebo 3 nebo 4, A': padne 2 nebo 5 nebo 6</i>
disjunktí (vzájemně neslučitelné) jevy A,B	$A \cap B = \emptyset$ \emptyset je prázdna množina	jevy A a B se vzájemně vylučují, jestliže nastane jeden, nemůže nastat druhý <i>př. A: padne liché číslo, B: padne sudé číslo</i>

Každému jevu můžeme přiřadit jeho **pravděpodobnost**, což je veličina, která charakterizuje míru očekávání, že **daný jev nastane**. Pro jakoukoliv definici pravděpodobnost vždy platí:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Klasická definice pravděpodobnosti - pokud zkoumaný jev splňuje následující předpoklady:

- všech možných výsledků je **konečně mnoho**
- všechny výsledky jsou **stejně možné**
- žádné dva výsledky nemohou **nastat současně**

pak **pravděpodobností jevu A** nazýváme číslo

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

kde m je počet všech výsledků příznivých jevu A a n počet všech možných výsledků v pokusu.

př. V případě již nudné hrací kostky je $m = 6$ (mohou padnou čísla od 1 do 6) a pro jev *padne 2 nebo 4* je $n = 2$ (chceme, aby padla 2 nebo 4)

Statistická definice pravděpodobnosti - jestliže máme k dispozici velké množství opakování stejného pokusu, definujeme pst jevu jako relativní četnost

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{m(p)}$$

př. Bylo vyrobeno 2000 plyšových medvídků, z toho 20ti chybělo alespoň jedno očičko. Jaká je pravděpodobnost, že si dítě vybere defektního medvídka?

$$P(A) = \frac{20}{2000} = 0,01 = 1\%$$

Pravděpodobnost jistého jevu $P(\Omega) = 1$.

Pravděpodobnost nemožného jevu $P(\emptyset) = 0$.

Pro pravděpodobnost sjednocení dvou jevů A, B platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Speciálně, jestliže jsou jevy navzájem se vylučující, pak platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pro pravděpodobnost jevu A' opačného k jevu A platí:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B je pravděpodobnost, že nastane jev A, jestliže už nastal jev B. Na jev A tedy klademe podmínku splnění jevu B a jeho pravděpodobnost může být jiná, než v případě, kdy na něj tato podmínka kladena není. Podmíněnou pst definujeme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ jestliže } P(B) \neq 0$$

př. Jaká je pravděpodobnost, že při dvou hodech kostkou bude součet obou hodnot 7 (jev A), jestliže na první kostce padne 3 (jev B)?

$P(B) = 6$, neboť na první kostce padne 3 a na druhé je jedno, v úvahu připadají tedy kombinace [3,1], [3,2], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6], kterých je celkem 6.

$P(A \cap B) = 1$, neboť na první kostce musí padnout 3 a na druhé 4, aby byl součet 7, tedy jediná možná kombinace [3,4].

Dosadíme do výše uvedeného vzorce

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$$

Nezávislé jevy A, B jsou jevy, které se navzájem neovlivňují. Pravděpodobnost realizace jednoho tedy nezávisí na tom, jak proběhne druhý jev, což zapisujeme (za podmínky $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$)

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{a} \quad P(B|A) = P(B)$$

Jevy A, B jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nezávislé pokusy jsou takové pokusy při nichž výsledek jednoho pokusu nezávisí na výsledku ostatních pokusů.

POZOR!!! Rozdíl mezi jevem a pokusem: pokus je hod kostkou, jev je tvrzení např. *padne 6*

44. Goniometrické rovnice

ZÁKLADNÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

$$\sin x = a, \quad \cos x = a \quad a \in (-1, 1) \quad x \in R$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad a \in R \quad x \in R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = a \quad a \in R \quad x \in R - \{k\pi\}$$

Př. **rovnice**

$$\sin x = -0,5$$

$$x_1 = 210^\circ, \quad x_2 = 330^\circ$$

$$K = k \in Z \cup \{210^\circ + 2k\pi, 330^\circ + 2k\pi\}$$

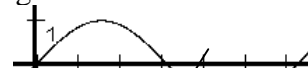
nerovnice

$$\sin x \leq -0,5$$

$$x_1 = 210^\circ, \quad x_2 = 330^\circ$$

$$K = k \in Z \cup \langle 210^\circ + 2k\pi, 330^\circ + 2k\pi \rangle$$

interval se určí podle jednotkové kružnice nebo grafu



SLOŽITĚJŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Pokud je v rovnici více goniometrických funkcí, převedeme je na jednu goniometrickou funkci.

Pokud odmocňujeme, musíme provést zkoušku.

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x - \sin(90^\circ - 2x) = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{3x + 90^\circ - 2x}{2} \cdot \sin \frac{3x - 90^\circ + 2x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \quad \vee \quad \sin \frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

45. Trigonometrie

PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

Goniometrické funkce

OBECNÝ TROJÚHELNÍK

Sinova věta: $2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ – poměr strany a protilehlého vnitřního úhlu je

konstantní a je roven průměru kružnice opsané. **Použití:** známe stranu a 2 úhly nebo 2 strany a úhel jedné z nich.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Kosinova věta: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ – **Použití:** známe 3 strany nebo 2 strany a úhel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

jimi sevřený.

46. Lineární rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Obor proměnnosti: obor, v němž chceme danou rovnici řešit.

Definiční obor (D): obor, v němž má rovnice smysl.

Obor pravdivosti (P=K): množina kořenů.

Řešit rovnici znamená najít takové x , které dané rovnici vyhovuje.

Nutno provést zkoušku.

Ekvivalentní úpravy rovnic:

- 1) Rovnice lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
- 2) Rovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
- 3) Rovnice se nezmění, když obě její strany vynásobíme nebo vydělíme stejným výrazem.

Absolutní hodnota: vzdálenost bodu od počátku na číselné ose.

Rovnice s absolutní hodnotou řešíme pomocí **nulových bodů**.

Např. $y = |x+1| + |1-x|$

$$x+1=0 \quad 1-x=0$$

$$x=-1 \quad x=1$$

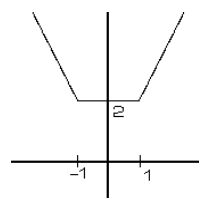
$$-1 \quad 1$$

$x+1$	-	+	+
$1-x$	+	+	-

$$x \in (-\infty; -1) \quad x \in \langle -1; 1 \rangle \quad x \in \langle 1; \infty \rangle$$

$$y = -(x+1) + (1-x) \quad y = (x+1) + (1-x) \quad y = (x+1) - (1-x)$$

$$y = -2x \quad y = 2 \quad y = 2x$$



Pozor! musíme vždy výsledek porovnat s intervalem – např. $x \in \langle 1; 3 \rangle$ a výsledek je $x = 4$, proto rovnice nemá v tomto intervalu řešení.

$$x^2 - 4 = 0 \quad 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$y = x^2 - 4 \quad y = x^2 \wedge y = -1,5x - 2$$

$$K = \{\pm 2\} \quad K = \{ \}$$

47. Nerovnice s absolutní hodnotou

ostré znaky nerovnosti: $<$ menší než
 $>$ větší než

neostré znaky nerovnosti: \leq menší nebo rovno než
 \geq větší nebo rovno než

Ekvivalentní úpravy nerovnic:

Nerovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.

V nerovnici lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.

Nerovnice se nezmění, jestliže její obě strany vynásobíme stejným výrazem, který je kladný na celém definičním oboru.

Násobíme-li nerovnici výrazem, který je záporný na celém def. oboru, pak musíme převrátit znak nerovnosti.

Nerovnice s absolutní hodnotou řešíme pomocí **nulových bodů**

$$|3x - 1| < x \quad \text{NB: } \frac{1}{3}$$

$ 3x - 1 $	$-3x + 1$	$3x - 1$
------------	-----------	----------

$$\forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \quad -3x + 1 < x$$

$$\frac{1}{4} < x \quad K_1 \quad \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\forall x \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \quad 3x - 1 < x$$

$$\frac{1}{2} < x \quad K_2 \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

$$K = K_1 \cup K_2 \Rightarrow K \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

Číselné intervaly

Otevřený: $(a, b) = \{x \in R; a < x < b\}$

Uzavřený: $\langle a, b \rangle = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$

Polouzavřený: zleva uzavřený: $\langle a, b \rangle = \{x \in R; a \leq x < b\}$

zprava uzavřený: $(a, b] = \{x \in R; a < x \leq b\}$

S intervaly pracujeme stejně jako s množinami, a proto pro ně platí stejné operace.

Společný násobek a dělitel

Nejmenší spol. násobek: $n(12, 28, 42) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, v prvočíselném rozkladu má každé prvočíslo obsažené v nejvyšší mocnině.

Největší spol. dělitel: $D(12, 28, 42) = 2$, v prvočíselném rozkladu má pouze spol. prvočíslo.

48. Komplexní čísla

Komplexní – složené, imaginární – neskutečné, vymyšlené

$a = [a_1 + a_2]$ – Gausova rovina, $|a|$ – vzdálenost v G. rovině od počátku

Absolutní hodnota: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ – reálné číslo

Komplexní jednotka: číslo, jehož absolutní hodnota se rovná 1

Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2i$

Komplexně sdružené č.: $\bar{a} = a_1 - a_2i$,

Opačné číslo: $-a = -a_1 - a_2i$

Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Převrácené číslo: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1 + a_2i}$

Exponenciální tvar: $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ – α v radiánech

OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

$$i^2 = -1$$

Sčítání: $a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$

Násobení: $a \cdot b = (a_1 + a_2i)(b_1 + b_2i)$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha + \beta)}$$

Dělení: $\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2i}{b_1 + b_2i} \cdot \frac{b_1 - b_2i}{b_1 - b_2i}$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)}$$

MOIVREOVA VĚTA

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Mocniny: $a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

Odmocniny: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n})$

49. Logaritmické funkce

Logaritmus kladného čísla x o základu a je reálné číslo označované $\log_a x$, pro které platí rovnost:

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

TIP: snadněji se pamatuje - *Logaritmus je číslo, kterým musíme umocnit základ, abychom dostali číslo logaritmované.*

př. $\log_4 16 = 2$, neboť $4^2 = 16$

Dekadické logaritmy (desítkové) jsou logaritmy o základu 10 ($a = 10$), zapisujeme je: $y = \log_{10} x = \log x$ a dle definice zřejmě platí $x = 10^y$.

př. $\log 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$

Přirozeným logaritmem nazýváme logaritmus o základu e (Eulerovo číslo $e = 2,718$), který značíme $y = \log_e x = \ln x$ a platí $x = e^y$.

Obecný vztah mezi soustavami logaritmů:

Pokud chceme vypočítat logaritmus se základem b jehož hodnoty nemáme k dispozici, ale máme k dispozici hodnoty logaritmů se základem c , využíváme vztahu $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

(Nejčastěji používáme: $c = 10$ nebo $c = e$)

$$\text{př. } \log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = 0,631$$

Počítání s logaritmy:

logaritmus mocniny	$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ pro každé r reálné př. $\log 100^2 = 2 \cdot \log 100 = 2 \cdot 2 = 4$
logaritmu odmocniny	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$ pro každé n přirozené př. $\log \sqrt{100} = \frac{1}{2} \cdot \log 100 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
logaritmus součinu	$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ př. $\log(100 \cdot 1000) = \log 100 + \log 1000 = 2 + 3 = 5$
logaritmus podílu	$\log \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, x_2 \neq 0$ př. $\log \frac{100}{10} = \log 100 - \log 10 = 2 - 1 = 1$

Komplexní – složené, *imaginární* – neskutečné, vymyšlené

$a = [a_1 + a_2 i]$ – Gausova rovina, $|a|$ – vzdálenost v G. rovině od počátku

Absolutní hodnota: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ – reálné číslo

Komplexní jednotka: číslo, jehož absolutní hodnota se rovná 1

Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2 i$

Opačné číslo: $-a = -a_1 - a_2 i$

Komplexně sdružené č.: $\bar{a} = a_1 - a_2 i,$

Převrácené číslo: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1 + a_2 i}$

Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Exponenciální tvar: $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ – α v radiánech

OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

$$i^2 = -1$$

Sčítání: $a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$

Násobení: $a \cdot b = (a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i)$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha + \beta)}$$

Dělení: $\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} \cdot \frac{b_1 - b_2 i}{b_1 - b_2 i}$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)}$$

MOIVREOVA VĚTA

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Mocniny: $a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

Odmocniny: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n})$

50. Řešení rovnic v oboru komplexních čísel

KVADRATICKÉ ROVNICE S DISKRIMINANTEM MENŠÍM 0

$$x = \pm\sqrt{-m} = \pm i\sqrt{m}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (D < 0) \Rightarrow x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

BINOMICKÉ ROVNICE

$$x^n = m \Rightarrow x = \sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{|m|} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{n} + i \sin \frac{0+2k\pi}{n} \right)$$

Je-li binomická rovnice s reálnými kořeny stupně sudého, pak má 2 reálné kořeny (čísla opačná) a komplexní kořeny jsou vždy 2 a 2 komplexně sdružené.

Je-li stupně lichého, pak má jeden reálný kořen a 2 a 2 komplexně sdružené.